

## **ANÁLISE DE ESTRUTURAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS**

GUILHERME OLIVEIRA FERRAZ DE PAIVA<sup>1\*</sup>, FRANCISCO EVANGELISTA JUNIOR<sup>2</sup>;  
GELSON SOUSA ALVES<sup>3</sup>; JOSE FABIANO ARAÚJO MOREIRA<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Mestrando em Estruturas, UnB, Brasília-DF, guilheerme\_07@hotmail.com

<sup>2</sup>PhD. em Engenharia Civil, Prof. ENC, UnB, Brasília-DF, fejr@unb.br

<sup>3</sup>Doutorando em Estruturas, UnB, Brasília-DF, gelsondsalves@gmail.com

<sup>4</sup>Doutorando em Estruturas, UnB, Brasília-DF, jf\_moreira1991@hotmail.com

Apresentado no

Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia – CONTECC'2016  
29 de agosto a 2 de setembro de 2016 – Foz do Iguaçu, Brasil

**RESUMO:** Este trabalho teve como objetivo implementar formulações não convencionais do Método dos Elementos Finitos (MEF) aplicadas na análise de estruturas considerando regime elástico linear. Foram empregadas funções de enriquecimento polinomiais para simulações em domínios bidimensionais de forma a obter melhores aproximações em problemas de valor de contorno (PVC) com soluções suaves, conforme a estratégia do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). O PVC escolhido para avaliação do método foi uma viga em balanço submetida à flexão simples com uma carga aplicada na extremidade livre. As simulações foram feitas com quatro malhas utilizando elemento quadrilateral com diferentes graus de refinamento. Através dos resultados das simulações obtidas via MEF e MEFG, calculou-se uma taxa de erro em relação à solução analítica obtida a partir das equações da mecânica dos sólidos. A rápida convergência dos resultados utilizando MEFG demonstrou a capacidade do método em resolver problemas de valor de contorno, ainda que utilizando malhas grosseiras.

**PALAVRAS-CHAVE:** MEFG, enriquecimento polinomial, estruturas, elástico linear.

### **ANALYSIS OF STRUCTURES USING THE GENERALIZED FINITE ELEMENT METHOD**

**ABSTRACT:** This study aimed to implement non-conventional formulations of the Finite Element Method (FEM) applied to the structural analysis considering linear elastic regime. Polynomial enrichment functions were used for simulations in two-dimensional domain to obtain better approximations at boundary value problems (BVP) with soft solutions, according to the Generalized Finite Elements Method (GFEM) strategy. The BVP chosen for evaluation of the method was one cantilever subjected to simple bending with a load applied at the free end. The simulations were made using four meshes using quadrilateral element with different degrees of refinement. Through the simulation results obtained using MEF and using GFEM, we calculated an error rate compared with the analytical solution obtained from the solid mechanics equations. The fast convergence of the results using the GFEM demonstrated the method ability to resolve boundary value problems, but using coarser meshes.

**KEYWORDS:** GFEM, polynomial enrichment, structures, linear elastic.

## INTRODUÇÃO

Nos últimos anos o Método dos Elementos Finitos (MEF) vem ganhando espaço, sobretudo devido o desenvolvimento de computadores cada vez mais poderosos abrindo espaço para o desenvolvimento da Mecânica Computacional. Os modelos matemáticos passaram então a ser avaliados por máquinas com capacidades de processamento enorme permitindo, desta forma, a evolução dos modelos, que tem se tornado mais sofisticados e complexos. O desenvolvimento de softwares baseados em MEF, por exemplo, tornou-se fácil dado o desenvolvimento de recursos de pré e pós processamento ricos em recursos gráficos iterativos que permitem a manipulação dos programas mesmo por usuários não muito familiarizados com a teoria (Alves, 2012, p. 2).

Por outro lado, diante de certos problemas de valores de contorno (PVC's), o MEF convencional não descreve satisfatoriamente o fenômeno analisado. Problemas que tratam de propagação de trincas, grandes deformações, vibrações, são naturalmente mais complexos. Ainda que seja possível obter aproximações satisfatórias via MEF convencional, deve-se levar em consideração qual (ais) o(s) custo(s) para tanto. Casos mais complicados exigem alterações na discretização do modelo (elevado refinamento de malha) tornando quase que inviável a análise dado o enorme custo computacional.

Neste contexto, os Métodos sem Malha passaram a ganhar espaço. São métodos numéricos utilizados na solução de PVC de forma a reduzir, ou mesmo eliminar, a dependência existente entre as equações que governam o problema e a respectiva malha de elementos finitos. E, ainda que não seja um método sem malha propriamente dito, o Método dos Elementos Finitos Generalizados, MEFG, segue o mesmo princípio de buscar minimizar a importância da malha frente à qualidade do resultado (Duarte, 1995; Duarte *et al.*, 2006).

## MATERIAIS E MÉTODOS

O Método dos Elementos Finitos é um método geral e muito poderoso em aplicações que envolvem problemas complexos do ponto de vista físico, de geometria e das condições de contorno. Neste método, o domínio é visto como uma coleção de subdomínios e, partindo de cada um destes, a equação que governa o problema é aproximada por algum dos métodos variacionais existentes (Reddy, 2006).

Segundo Reddy (2006), o método possui três características que contribuem substancialmente para a superioridade do MEF frente aos demais métodos, a saber:

1. Divisão de um domínio geometria complexa em subdomínios mais simples;
2. Para cada elemento, as equações algébricas que definem os parâmetros de interesse são desenvolvidas a partir das equações que governam o problema;
3. Os elementos, localmente e isoladamente analisados, são alocados em sua posição global dentro do domínio e assim obtêm-se a solução geral do problema.

Para o um campo geral  $\mathbb{R}^n$ , estabelece-se a seguinte aproximação para o campo dos deslocamentos, onde o campo contínuo é representado pela combinação linear de uma função interpoladora conforme a Eq. 1:

$$u(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x) \cdot u_j \quad \text{Eq. 1}$$

Onde  $N_j(x)$  representa as funções de forma. Para que a Eq. 1 seja válida é necessário que, para qualquer posição do domínio de um problema de  $n$  pontos nodais, seja observada a seguinte propriedade:

$$\sum_{j=1}^n N_j(x) = 1 \quad \text{Eq.2}$$

A Eq. 2 descreve a propriedade da Partição da Unidade (PU) das funções de forma que tem relação direta com a propriedade do Suporte Compacto representada pelo Delta de Kronecker ( $\delta_{ij} = [i = j]$ ).

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) nada mais é que uma variação do MEF convencional. Foi inicialmente proposto por Babuška *et al.* (1994) sob a denominação de Método dos Elementos Finitos Especiais. Recebeu esta denominação porque, apesar de se tratar de Elementos Finitos, foram empregadas funções de forma não convencionais (“especiais”) escolhidas para conferir maior acurácia ao método. A escolha destas funções deve pautar-se na garantia da

manutenção das condições iniciais de estabilidade do problema bem como na dificuldade de implementação (Babuška *et al.*, 1994).

A estratégia MEFG consiste na combinação entre as funções PU ( $\mathcal{N}_j(x)$ ) – função de forma padrão do MEF - e funções linearmente independentes, definidas na Eq. 3, em que  $L_{ji}(x)$  são as funções de enriquecimento definidas em cada nó  $x_j$  do domínio e,  $q$  o número total de funções (Evangelista Jr *et al.*, 2013).

$$\mathcal{J}_j \stackrel{\text{def}}{=} \{L_{j1}(x), L_{j2}(x), \dots, L_{jq}(x)\} \text{ sendo } \{L_{j1}(x) = 1\} \quad \text{Eq. 3}$$

Estas funções podem ser polinomiais ou obtidas a partir do conhecimento, a priori, do comportamento da solução do PVC que se quer analisar. O produto entre as funções de forma oriundas da PU pelas funções da equação anterior resulta na função produto ou função de forma  $\phi_{ji}$  do MEFG (Eq. 4).

$$\{\phi_{ji}(x)\}_{i=1}^q = \mathcal{N}_j(x) \cdot \{L_{ji}(x)\}_{i=1}^q \quad \text{Eq. 4}$$

Como resultado deste processo, tem-se que as funções de forma  $\phi_{ji}(x)$  do MEFG atrelam-se ao nó  $x_j$  (ALVES, 2012). Isto se deve ao fato de as mesmas herdarem da PU a propriedade do suporte compacto, em outras palavras, valem zero fora do elemento que contém o nó a que estão associadas (ALVES, 2014). A manutenção de tais características é vital para que a continuidade entre os elementos da malha inicial seja garantida (Strouboulis *et al.*, 2000). A aproximação do MEFG genérica é obtida, portanto, a partir da seguinte combinação linear, onde  $\mathcal{N}_j(x)$  refere-se ao MEF, e,  $\mathcal{N}_j(x) \cdot L_{ji}(x)$ , refere-se ao MEFG:

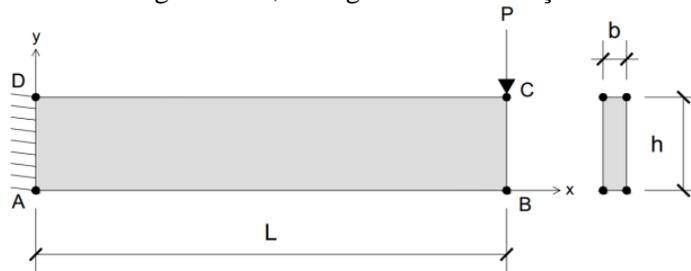
$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^n \mathcal{N}_j(x) \cdot \left\{ u_j + \sum_{i=2}^q L_{ji}(x) \cdot b_{ji} \right\} \quad \text{Eq. 5}$$

Fisicamente  $u_j$  e  $b_{ji}$  representam, respectivamente, os graus de liberdade da estrutura atrelados ao nó  $x_j$  da nuvem  $w_j$ ; sendo que este último representa os graus de liberdade adicionais em correspondência a cada componente “i” das funções de forma enriquecidas.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Procedeu-se primeiramente à implementação do MEFG pela introdução de diversas estratégias de enriquecimento polinomial em um programa desenvolvido utilizando a linguagem de programação Matlab, com o intuito de obter boas aproximações para o campo de deslocamentos e, conseqüentemente o de tensões, com malhas mais grosseiras que àquelas que seriam necessárias no MEF convencional. Foi analisada, então, uma viga engastada e livre submetida à flexão simples com uma carga na extremidade oposta ao apoio, conforme pode ser visto na Figura 1.

Figura 1. Viga engastada e livre – geometria, carregamento e condições de contorno.



Dimensões, carregamento, condições de contorno e propriedades mecânicas são os seguinte (em unidades consistentes):

- Dimensões -  $L = 2$ ;  $h = 0,4$ ;  $b = 0,1$ ; Módulo de Elasticidade -  $E = 10 \text{ e}+07$ ; Coeficiente de Poisson -  $\nu = 0$ ; Condições de contorno -  $u_x(0, y) = u_y(0; 0,1) = 0$ ; Carga -  $P = 10$

A solução analítica para o deslocamento  $u_y$  é dada por ( $I$  é a Inércia da seção transversal):

$$u_y(0; 0,1) = -\frac{f_y L^3}{3EI} \quad \text{Eq.6}$$

Tem-se, então, que o valor de referência para análise em questão é:  $u_y(0; 0,1) = 0,005$ .

Utilizando o elemento finito quadrilateral com quatro nós, foram realizadas quatro discretizações (refinamento) com relação à malha conforme, Figura 2, com o intuito de demonstrar a

que grau a discretização deve avançar até a solução convergir. Primeiramente a simulação foi feita sem adição de enriquecimento P0 (MEF convencional), em seguida, foram adicionados enriquecimentos polinomiais lineares P1 e quadráticos P2 sobre o mesmo refinamento da malha (Gráfico 1).

Em uma segunda análise, foi realizado sobre cada malha (Gráfico 2) um refinamento polinomial (P0 até P2). Para todas as malhas não foram enriquecidos os nós em que se situam as condições de contorno de Dirichlet, de forma a respeitar-se as mesmas.

Os Gráficos 1 e 2 demonstram a evolução do erro relativo ( $\epsilon$ ) em função Número de Graus de Liberdade (NGL).

Figura 2. Malhas de elementos quadrilaterais para aproximação via MEF.

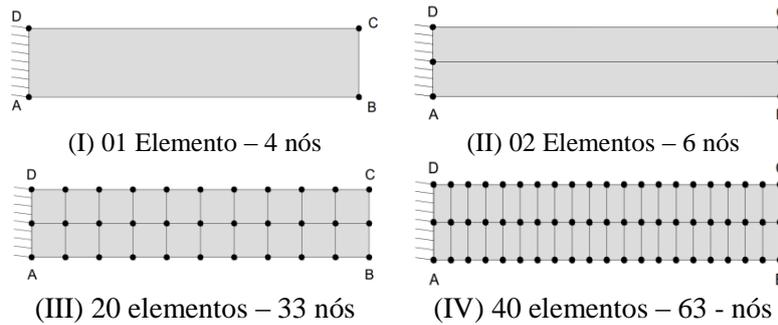


Gráfico 1. NGL x  $\epsilon$  para cada ordem polinomial de funções de enriquecimento.

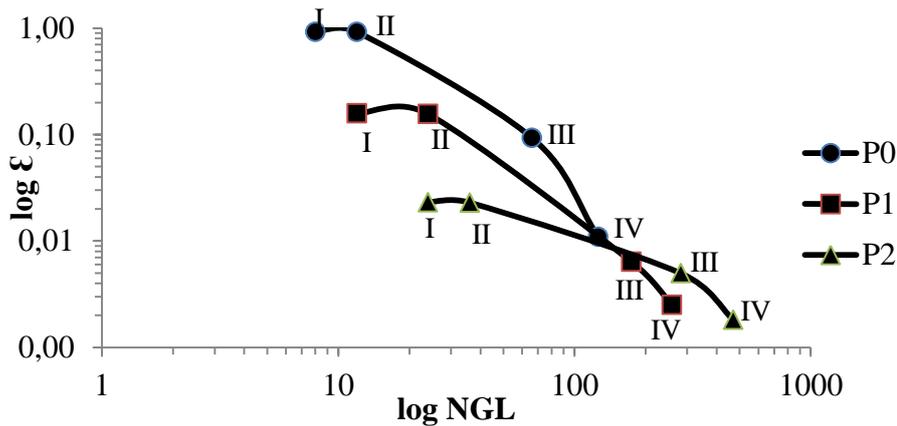
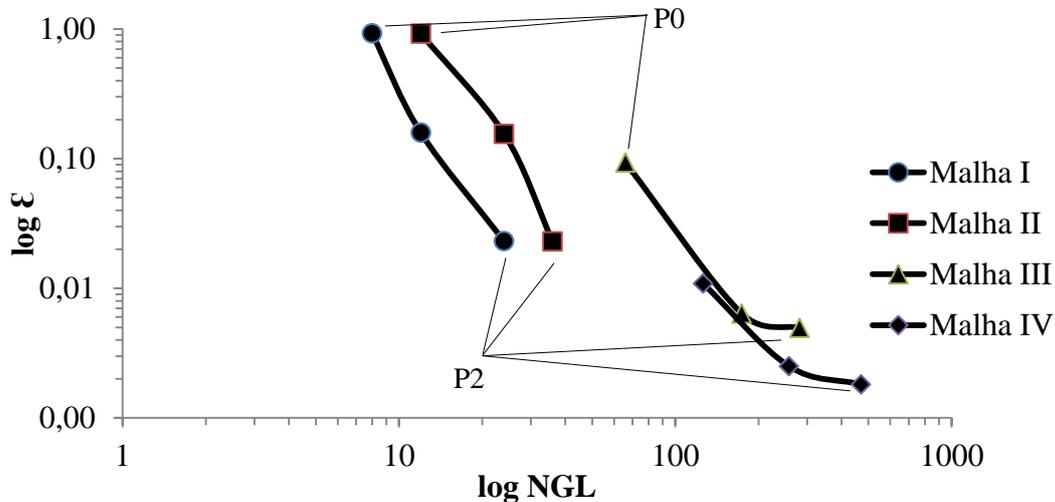


Gráfico 2. NGL x  $\epsilon$  - para cada malha de elementos quadrilaterais.



No Gráfico 1 é possível observar como a solução se desenvolve, em função do refinamento da malha. Percebe-se que, embora haja convergência em P0, o resultado se potencializa quando é

utilizado enriquecimento polinomial. O Gráfico 2 mostra a redução do erro relativo a medida que se adicionam ordens polinomiais de enriquecimento sobre cada malha.

## **CONCLUSÃO**

O Método dos Elementos Finitos Generalizados mostrou-se bastante eficiente. Observa-se que os resultados estão absolutamente em consonância com os obtidos a partir das soluções analíticas para o problema analisado.

No Gráfico 1 é possível perceber a rápida convergência da solução quando utiliza-se o enriquecimento. Destaca-se ainda o ótimo resultado para a Malha I, onde com apenas 01 elemento alcançou-se uma solução bem próxima da analítica.

É evidente, portanto, o potencial do MEEG, haja vista a qualidade significativa dos resultados obtidos com uma quantidade reduzida de graus de liberdade – malha grosseira – o que, do ponto de vista computacional, é extremamente vantajoso.

## **AGRADECIMENTOS**

À CAPES pela concessão de bolsa de pesquisa ao primeiro e ao terceiro autores e ao CNPq pela concessão de bolsa de pesquisa ao quarto autor.

## **REFERÊNCIAS**

- Alves, G. D. S. Implementação do Método dos Elementos Finitos Generalizados com aplicação em materiais compósitos. Dissertação de Mestrado. Brasília: Universidade de Brasília, 2014
- Alves, P. D. Estratégia Global Local aplicada ao Método dos Elementos Finitos Generalizados. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2012
- Babuška, I.; Caloz, G.; Osborn, J. E. Special finite element method for a class second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 31, n. 4, 1994. p. 945 – 981.
- Duarte, C. A. A Review of Some Meshless Methods to Solve Partial Differential Equations. Technical Report 06, 1995.
- Duarte, C. A.; Liszka, T. J.; Tworzydło, W. W. Clustered generalized finite element methods for mesh unrefinement, non-matching and invalid meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006.
- Evangelista JR, F.; Roesler, J. R.; Duarte, C. A. Two scale Approach Predict Multi-Site Cracking Potential in 3-D Structures using the Generalized Finite Element Method. *International Journal of Solids and Structures*, v. 50, p. 1991-2002, 2013.
- Reddy, J. N. *An Introduction to The Finite Element Method*. 3rd. ed. [S.l.]: Mc Graw-Hill series in mechanical engineering, v. ISBN 0-07-246685-5, 2006
- Strouboulis, T.; Copps, K.; Babuska, I. *The generalized finite element method*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2000